

TEMA 4: APLICACIONES DE LA REPRESENTACIÓN DE FOURIER

Aplicaciones de la representación de Fourier: respuesta en frecuencia de los sistemas LTI; muestreo y reconstrucción de señales continuas a partir de sus muestras.

RESPUESTA EN FRECUENCIA DE LOS SISTEMAS LTI

Las propiedades de la transformada de Fourier permiten el análisis de sistemas LTI de manera sencilla.

La propiedad de convolución relaciona la entrada y la salida de un sistema LTI de la siguiente forma:

$$y(t) = x(t) * h(t) \xrightarrow{FT} Y(j\omega) = X(j\omega) \cdot H(j\omega)$$
$$y[n] = h[n] * x[n] \xrightarrow{DTFT} Y(e^{j\Omega}) = X(e^{j\Omega}) \cdot H(e^{j\Omega})$$

La multiplicación en el dominio de la frecuencia es muy útil en el análisis y diseño de sistemas LTI: nos permite introducir la noción de filtrado, analizar sistemas caracterizados por ecuaciones diferenciales o en diferencia de coeficientes constantes, estudiar el muestreo de señales continuas,

Filtros ideales selectivos en frecuencia

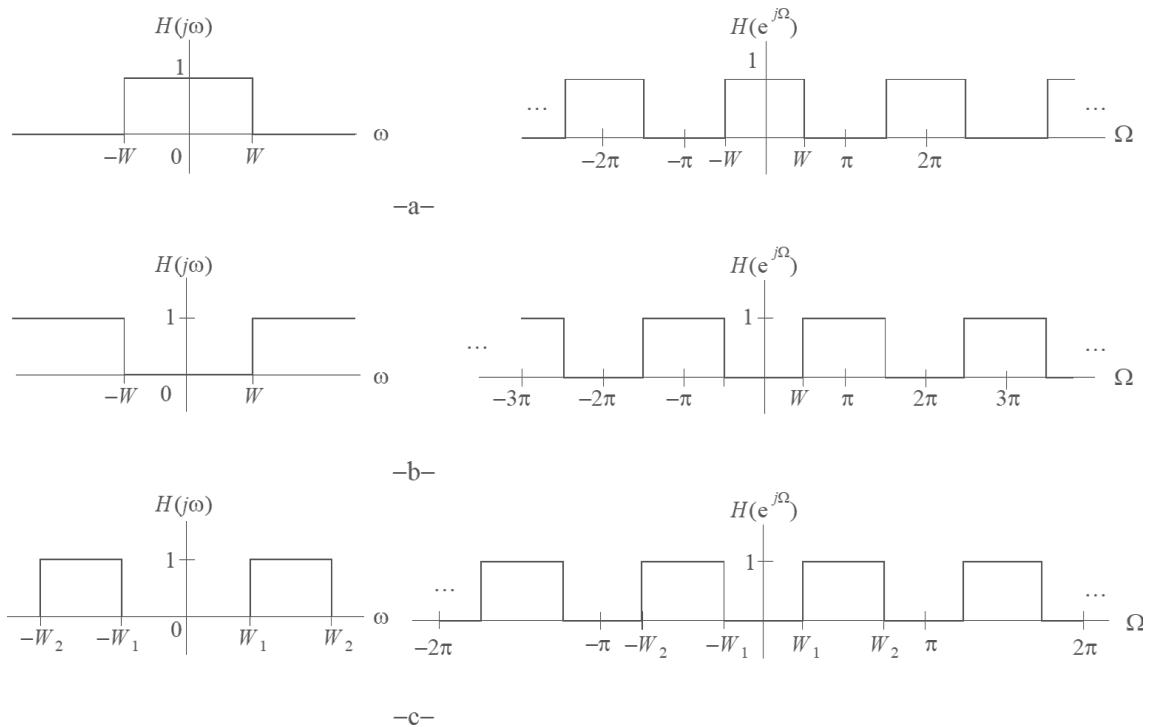
El sistema filtra la señal de entrada presentando diferentes respuestas a las componentes de la entrada a diferentes frecuencias.

- Banda de paso: banda de frecuencias que se transmiten por el sistema
- Banda de rechazo: banda de frecuencia que son atenuadas por el sistema
- Banda de transición: rango de frecuencias en la que se produce una transición gradual desde la banda de paso a la banda de rechazo (filtros reales)

En función de las características de la respuesta en frecuencia nos encontramos con:

- Filtro paso bajo: atenúa las componentes de alta frecuencia de la entrada y deja pasar las componentes de baja frecuencia.
- Filtro paso alto: atenúa las componentes de baja frecuencia de la entrada y deja pasar las componentes de alta frecuencia.
- Filtro paso banda: deja pasar las componentes de la entrada contenidas en una banda de frecuencia y atenúa las componentes fuera de esa banda

Los filtros ideales discretos se caracterizan por su comportamiento en la banda de frecuencia $-\pi < \Omega < \pi$, dado que la respuesta en frecuencia es 2π periódica.



Sistemas caracterizados por ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes

- Permiten modelar infinidad de procesos físicos
- Forma general:

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{K=0}^M b_K \frac{d^K x(t)}{dt^K}$$

Calculando la transformada de Fourier obtenemos la respuesta en frecuencia del sistema continuo:

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k}$$

Sistemas caracterizados por ecuaciones en diferencia con coeficientes constantes

- Forma general:

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

Calculando la transformada de Fourier se obtiene la respuesta en frecuencia del sistema discreto:

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{Y(e^{j\Omega})}{X(e^{j\Omega})} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k (e^{-j\Omega})^k}{\sum_{k=0}^N a_k (e^{-j\Omega})^k}$$

MUESTREO DE SEÑALES CONTINUAS

- Una gran parte de las señales que encontramos en nuestra experiencia cotidiana son continuas; sin embargo, cuando procesamos estas señales debemos escoger entre procesamiento analógico o procesamiento digital. Si optamos por el procesamiento digital debemos manipular la señal para poder tratarla digitalmente.
- Se puede considerar el muestreo como la transformación de una señal continua $x(t)$ en una señal discreta $x[n]$ que contiene la misma información que la señal continua. Veremos que mediante un proceso de interpolación se puede reconstruir la señal $y(t)$ a partir de la señal discreta $y[n]$ obtenida tras el procesamiento digital.
- El muestreo de señales continuas, y su reconstrucción a partir de secuencias discretas constituye la interfaz entre los mundos continuo y discreto.
- La teoría de muestreo desempeña un papel fundamental en determinar la exactitud y viabilidad de cualquier esquema de tratamiento digital.
- Analizamos el problema de muestreo y reconstrucción desde el punto de vista del dominio del tiempo y de la frecuencia.

Muestreo uniforme en el dominio del tiempo

Función de muestreo: tren de impulsos:

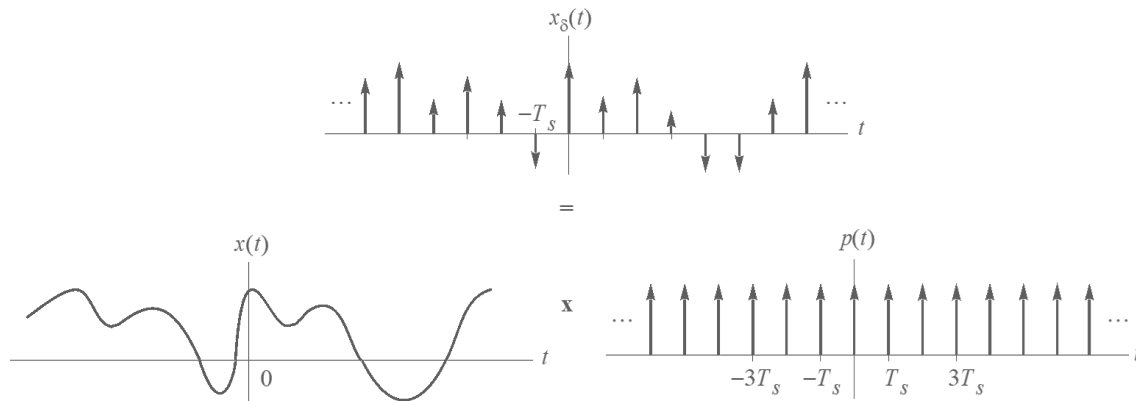
$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$

donde T_s es el periodo de muestreo y, en consecuencia, la frecuencia de muestreo será: $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$ la frecuencia

Si multiplicamos la señal continua en el tiempo por el tren de impulsos $p(t)$:

$$x_{\delta}(t) = x(t) p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \delta(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \delta(t - nT_s)$$

(Recordad que $x[n] = x(nT_s)$)



Esta representación se conoce como **muestreo ideal mediante impulsos** e indica que, matemáticamente, podemos representar una señal muestreada como el producto de la señal continua original por un tren de impulsos equiespaciados.

Muestreo uniforme en el dominio de la frecuencia

Podemos describir el proceso de muestreo y conversión a secuencias discretas en el dominio de la frecuencia:

$$P(j\omega) = \frac{2\pi}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s)$$

$$x_{\delta}(t) = x(t) p(t) \xleftrightarrow{FT} X_{\delta}(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * P(j\omega)$$

$$X_{\delta}(j\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j\omega - jk\omega_s)$$

La transformada de Fourier de una señal muestreada se corresponde con **infinitas versiones desplazadas de la FT de la señal original**. Las versiones están desplazadas múltiplos enteros de la frecuencia de muestreo ω_s .

Las versiones desplazadas de $X(j\omega)$ pueden solaparse si ω_s no es lo suficientemente grande respecto a la frecuencia máxima de la señal $X(j\omega)$.

Si existe solapamiento entre muestras se produce una distorsión de la señal original. Este efecto se conoce como **aliasing**. Si esto sucede, no podremos usar el espectro de la señal muestreada para analizar la señal continua en el tiempo; además no se podrá reconstruir la señal continua en el tiempo y limitada en banda a partir de sus muestras.

Reconstrucción ideal en el dominio de la frecuencia

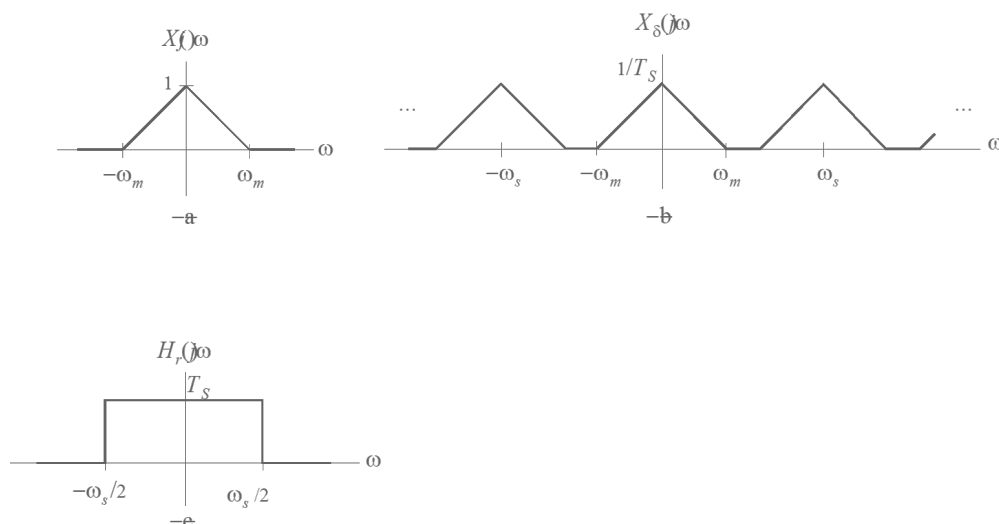
Las muestras de una señal no siempre determinan de forma única la correspondiente señal continua en el tiempo.

Teorema de muestreo (de Nyquist): una señal continua $x(t)$ limitada en banda, con ancho de banda ω_m , puede reconstruirse a partir de sus muestras si la frecuencia de muestreo ω_s es mayor que el doble del ancho de banda

$$\omega_s > 2\omega_m$$

- La frecuencia $\omega_s = 2\omega_m$ se conoce como frecuencia de Nyquist y representa la mínima tasa a la que se puede muestrear una señal limitada en banda sin pérdida de información.
- Si no existe solapamiento, se puede recuperar la señal eliminando réplicas de la señal en los múltiplos de la frecuencia de muestreo mediante un filtro paso bajo

$$X(j\omega) = X_\delta(j\omega)H_r(j\omega) \quad H_r(j\omega) = \begin{cases} T_s, & |\omega| < \frac{\omega_s}{2} \\ 0, & |\omega| > \frac{\omega_s}{2} \end{cases}$$



Reconstrucción ideal en el dominio del tiempo

Desde el punto de vista del dominio del tiempo:

$$X(j\omega) = X_\delta(j\omega)H_r(j\omega) \quad \Rightarrow \quad x(t) = x_\delta(t) * h_r(t) = h_r(t) * x_\delta(t)$$

$$x(t) = h_r(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t - nT_s)$$

- Filtro paso bajo ideal:

- Dominio de la frecuencia: $H_r(j\omega) = \begin{cases} T_s, & |\omega| < \frac{\omega_s}{2} \\ 0, & |\omega| > \frac{\omega_s}{2} \end{cases}$

- Dominio del tiempo: $h_r(t) = \frac{T_s \sin\left(\frac{\omega_s}{2}t\right)}{\pi t}$

- **Interpolación limitada en banda:** proceso de reconstrucción a partir de sus muestras de una señal limitada en banda

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_s}{2\pi}(t - nT_s)\right)$$

